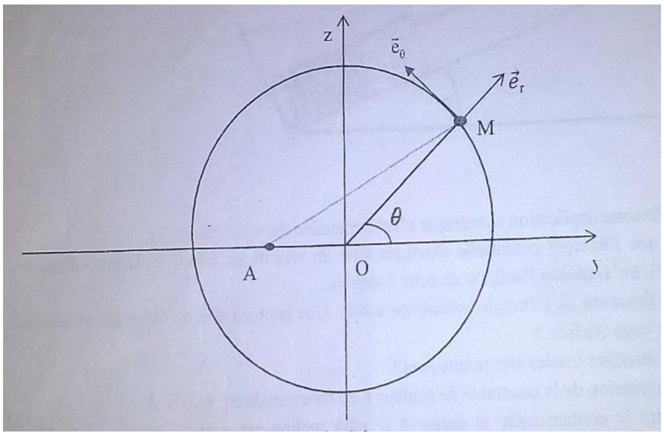
Série 4

Exercice 1

On considère par rapport à un repère galiléen R(O,x,y,z), un point materiel M de masse m décrivant, sans frottement, dans le plan vertical yOz, un cercle de centre O et de rayon 2a. Le point materiel M est repéré, à l'instant t, par l'angle $\theta = (Oy, \overrightarrow{e_r})$. $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$. M est soumis en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction $\vec{R}$ du cercle, à une force $\vec{F} = -K\overrightarrow{AM}$ avec K une constante positive et A un point de coordonnées (0,-a,0). On suppose que M est situé sur le périmètre du cercle (C). $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.

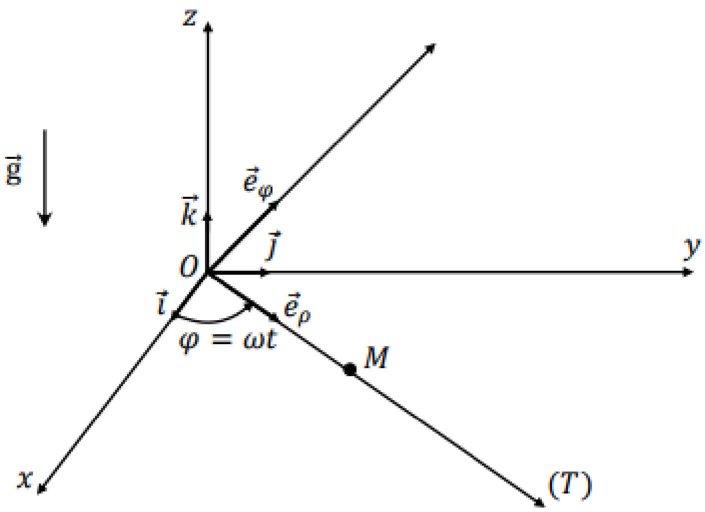


1. Quelle est l'énergie potentielle du point M
2. Déterminer les positions d'équilibre et leurs natures dans le cas particulier où Ka=mg.
3. Donner l'énergie cinétique de M.
4. Déduire de l'énergie mécanique E_m
5. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M à partir du :
   a. Théorème de l'énergie cinétique.
   b. Théorème du moment cinétique.
   c. Principe fondamentale de la dynamique
6. Est-ce qu'il y a conservation de l'énergie mécanique. Justifier votre réponse.
7. Exprimer la réaction $\vec{R}$ exercée par (C) sur M en fonction de m, g, et θ.

Exercice 2

Soit $\Re(O,\, xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi=\omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force loi

$\vec{F} = F\,\overrightarrow{e_\rho}$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\,\overrightarrow{e_\rho}$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



<u>N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$.</u>

1) Calculer les vitesses $\overrightarrow{V_r}$ et $\overrightarrow{V_e}$ de M

2) Calculer les accélérations $\overrightarrow{\gamma_r}$, $\overrightarrow{\gamma_e}$ et $\overrightarrow{\gamma_c}$ de M

3) Calculer la vitesse $\vec{V}\,(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}\,(M/\Re)$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

4) Déterminer $\overrightarrow{\sigma_O}\,(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

5) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

6) Déterminer $Ec\,(M/\Re)$ l'énergie cinétique du point M dans $\Re$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

7) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

8) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.